Word 算法手册文档：https://pubimage.spssau.com/algoword/dea.docx

DEA 算法

目录

SPSSAU 操作 2

SPSSAU 数据格式 3

算法 3

1. 确定决策单元（DMUs） 3
2. 非负平移 3
3. 效率值定义 4
4. 构建 DEA 模型 4
5. 求解 DEA 模型 5

参考文献 5

spssau.com

数据包络分析（DEA, Data Envelopment Analysis）是一种用于评估决策单元（DMUs）相对效率的非参数方法。其位于 SPSSAU-》综合评价-》DEA。

SPSSAU 操作

将分析项分别拖拽至右侧框然后'开始分析'即可。SPSSAU 中涉及 3 项参数，分别是类型、非负平移和保存效益。

- ✓ 类型：默认为 BCC（VRS, Variable Returns to Scale），可选为 CCR 类型（CRS, Constant Returns to Scale）。
- ✓ 非负平移：选中该参数后，以列为单位，如果某列数据出现小于等于 0，此时平移单位为：最小值的绝对值+0.01，此参数保证数据均为正数可正常计算。
- ✓ 保存效益：选中该参数后，SPSSAU 会将技术效益（TE，Technical Efficiency），规模效益（SE，Scale Efficiency）和综合效益（OE，Overall Efficiency）保存为标题，并且分别例为：TE_****，SE_****和 OE_****。

spssau.com

SPSSAU 数据格式

	A	B	C	D	E	F	G
1	决策单元DMU(year)	指标1	指标2	指标3	指标4	指标5	
2	1990	14.4	0.65	31.3	3621	0	
3	1991	16.9	0.72	32.2	3943	0.09	
4	1992	15.53	0.72	31.87	4086.67	0.07	
5	1993	15.4	0.76	32.23	4904.67	0.13	
6	1994	14.17	0.76	32.4	6311.67	0.37	
7	1995	13.33	0.69	30.77	8173.33	0.59	
8	1996	12.83	0.61	29.23	10236	0.51	
9	1997	13	0.63	28.2	12094.33	0.44	
10	1998	13.4	0.75	28.8	13603.33	0.58	
11	1999	14	0.84	29.1	14841	1	
12	...	...	...	...	...	...	
13							
14							

数据包络 DEA 分析，单独一列为决策单元 DMU（如果没有，或者不放入分析‘标签’中，SPSSAU 默认会称其为第 1 项，第 2 项，第 3 项依次类似这样）。一个指标占用一列（不论是投入还是产出指标）。

算法

1. 确定决策单元（DMUs）

选择需要评估的决策单元（如企业、部门等），并确定其投入和产出指标，设有n个决策单元（DMUs），每个决策单元有m个输入和q个输出。可以用以下矩阵表示：

$$X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1m} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n1} & x_{n2} & \cdots & x_{nm} \end{pmatrix}$$

$$Y = \begin{pmatrix} y_{11} & y_{12} & \cdots & y_{1q} \\ y_{21} & y_{22} & \cdots & y_{2q} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_{n1} & y_{n2} & \cdots & y_{nq} \end{pmatrix}$$

2. 非负平移

$$x_{ij} = |\min(x_{*j})| + 0.01$$

如果选中该参数，且满足$x_{*j} <= 0$这一前提时，此系统会进行上式处理。

spssau.com

3. 效率值定义

SPSSAU 中定义‘效率值’=产出/投入，如果投入相对较少产出相对较高时，‘效率值’则会相对较高，如果投入相对较多产出相对较少时，‘效率值’则会相对较低，‘效率值’公式如下：

$$h=\frac{\sum_{r=1}^{q} u_r y_r}{\sum_{i=1}^{m} v_i x_i}$$

投入项 X 的个数为m个，产出项 Y 的个数为q个，v表示各个投入项 X 的系数值，u表示各个产出项 Y 的系数值，u和v均为待求解的数值。以及约束条件如下：

$$\max\ h=\frac{\sum_{r=1}^{q} u_r y_r}{\sum_{i=1}^{m} v_i x_i}$$
$$h\le 1, u\ge 0, v\ge 0$$

4. 构建 DEA 模型

SPSSAU 中提供模型，分别是 CCR 模型和 BCC 模型，其 Charnes—Cooper 变换分别如下：

CCR 模型（CRS, Constant Returns to Scale）时：

$$\min\theta$$

$$\text{s.t.}\begin{cases}\sum_{j=1}^{n}\lambda_j \mathrm{X}_j+\mathrm{S}^-=\theta \mathrm{X}_{j0}\\ \sum_{j=1}^{n}\lambda_j \mathrm{Y}_j-\mathrm{S}^+=\mathrm{Y}_{j0}\\ \mathrm{S}^+,\mathrm{S}^-,\lambda_j\ge 0\\ \mathrm{j}=1,2,\cdots,n\end{cases}$$

BCC 模型（VRS, Variable Returns to Scale）时：

$$\min\theta$$

spssau.com

$$\text{s.t.}\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} \lambda_j X_j + S^- = \theta X_{j0} \\ \sum_{j=1}^{n} \lambda_j Y_j - S^+ = Y_{j0} \\ S^-, S^+, \lambda_j \geq 0 \\ j = 1,2,\cdots,n \\ \sum_{j=1}^{n} \lambda_j = 1 \end{cases}$$

θ表示效益值，$\lambda=(\lambda1,\lambda2,\ldots,\lambda n)^T$ 为权重向量，X_j 为第 j 个 DMU 的投入，Y_j 为第 j 个 DMU 的产出，S^-和 S^+分别为第 j 个 DMU 的投入与产出松弛变量，约束 S^-、S^+和 λ 均大于等于 0。

5. 求解 DEA 模型

SPSSAU 借助 pulp 包进行数学求解计算，分别计算得到 TE（TE，Technical Efficiency）、SE（SE，Scale Efficiency）和 OE（OE，Overall Efficiency），以及 S^-和 S^+等指标数据，并且进行输出，其中 OE = TE × SE。

- ✓ OE=1 时意味着 DEA 有效，反之 OE<1 意味着 DEA 无效；
- ✓ TE=1 意味着技术效率合理，反之 TE<1 意味着技术效益还有提升空间；
- ✓ SE=1 则说明规模收益不变（最优状态），SE<1 说明规模收益递增（规模过小可扩大规模增加效益），SE>1 说明规模收益递减（规模过大可减少规模增加效益）；
- ✓ 松驰变量 S-意义为‘减少多少投入时达目标效率’；
- ✓ 松驰变量 S+意义为‘增加多少产出时达目标效率’；
- ✓ 结合综合效益指标，S-和 S+共 3 个指标，可判断 DEA 有效性，如果综合效益=1 且 S-与 S+均为 0，则‘DEA 强有效’，如果综合效益为 1 但 S-或 S+大于 0，则‘DEA 弱有效’，如果综合效益<1 则为‘非 DEA 有效’。

参考文献

【1】The SPSSAU project (2024). SPSSAU. (Version 24.0) [Online Application Software]. Retrieved from https://www.spssau.com.

【2】PuLP: A Linear Programming Toolkit for Python (Version 2.6.0). Available at: https://github.com/coin-or/pulp.

【3】周俊,马世澎. SPSSAU 科研数据分析方法与应用.第 1 版[M]. 电子工业出版社,2024.