

DEA 算法

目录

SPSSAU 操作.....1

SPSSAU 数据格式 .....2

算法.....2

    1. 确定决策单元 (DMUs) .....2

    2. 非负平移.....3

    3. 效率值定义.....3

    4. 构建 DEA 模型 .....3

    5. 求解 DEA 模型 .....4

参考文献.....5

数据包络分析 (DEA, Data Envelopment Analysis) 是一种用于评估决策单元 (DMUs) 相对效率的非参数方法。其位于 SPSSAU-» 综合评价-» DEA。

SPSSAU 操作

开始分析  类型  非负平移  保存效益

年份	投入(X)
固定资产投资(亿)	产出(Y)
标签 [可选]	

将分析项分别拖拽至右侧框然后‘开始分析’即可。SPSSAU 中涉及 3 项参数，分别是类型、非负平移和保存效益。

- ✓ 类型：默认为 BCC (VRS, Variable Returns to Scale) ，可选为 CCR 类型 (CRS, Constant Returns to Scale) 。
- ✓ 非负平移：选中该参数后，以列为单位，如果某列数据出现小于等于 0，此时平移单位为：最小值的绝对值+0.01，此参数保证数据均为正数可正常计算。
- ✓ 保存效益：选中该参数后，SPSSAU 会将技术效益 (TE, Technical Efficiency) ，规模效益 (SE, Scale Efficiency) 和综合效益 (OE, Overall Efficiency) 保存为标题，并且分别例为：TE\_\*\*\*\*, SE\_\*\*\*\*和 OE\_\*\*\*\*。

### SPSSAU 数据格式

1	A	2	C	D	E	F	G
1	决策单元DMU(year)	指标1	指标2	指标3	指标4	指标5	
2	1990	14.4	0.65	31.3	3621	0	
3	1991	16.9	0.72	32.2	3943	0.09	
4	1992	15.53	0.72	31.87	4086.67	0.07	
5	1993	15.4	0.76	32.23	4904.67	0.13	
6	1994	14.17	0.76	32.4	6311.67	0.37	
7	1995	13.33	0.69	30.77	8173.33	0.59	
8	1996	12.83	0.61	29.23	10236	0.51	
9	1997	13	0.63	28.2	12094.33	0.44	
10	1998	13.4	0.75	28.8	13603.33	0.58	
11	1999	14	0.84	29.1	14841	1	
12	...	...	...	...	...	...	
13							
14							

数据包络 DEA 分析，单独一列为决策单元 DMU（如果没有，或者不放入分析‘标签’中，SPSSAU 默认会称其为第 1 项，第 2 项，第 3 项依次类似这样）。一个指标占用一列（不论是投入还是产出指标）。

### 算法

#### 1. 确定决策单元 (DMUs)

选择需要评估的决策单元（如企业、部门等），并确定其投入和产出指标，设有  $n$  个决策单元 (DMUs)，每个决策单元有  $m$  个输入和  $q$  个输出。可以用以下矩阵表示：

$$X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1m} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n1} & x_{n2} & \cdots & x_{nm} \end{pmatrix}$$

$$Y = \begin{pmatrix} y_{11} & y_{12} & \cdots & y_{1q} \\ y_{21} & y_{22} & \cdots & y_{2q} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_{n1} & y_{n2} & \cdots & y_{nq} \end{pmatrix}$$

## 2. 非负平移

$$x_{ij} = |\min(x_{*j})| + 0.01$$

如果选中该参数，且满足 $x_{*j} \leq 0$ 这一前提时，此系统会进行上式处理。

## 3. 效率值定义

SPSSAU 中定义‘效率值’=产出/投入，如果投入相对较少产出相对较高时，‘效率值’则会相对较高，如果投入相对较多产出相对较少时，‘效率值’则会相对较低，‘效率值’公式如下：

$$h = \frac{\sum_{r=1}^q u_r y_r}{\sum_{i=1}^m v_i x_i}$$

投入项 X 的个数为  $m$  个，产出项 Y 的个数为  $q$  个， $v$  表示各个投入项 X 的系数值， $u$  表示各个产出项 Y 的系数值， $u$  和  $v$  均为待求解的数值。以及约束条件如下：

$$\begin{aligned} \max h &= \frac{\sum_{r=1}^q u_r y_r}{\sum_{i=1}^m v_i x_i} \\ h &\leq 1, u \geq 0, v \geq 0 \end{aligned}$$

## 4. 构建 DEA 模型

SPSSAU 中提供模型，分别是 CCR 模型和 BCC 模型，其 Charnes—Cooper 变换分别如下：

CCR 模型（CRS, Constant Returns to Scale）时：

$$\min \theta$$

$$\text{s.t.} \begin{cases} \sum_{j=1}^n \lambda_j X_j + S^- = \theta X_{j_0} \\ \sum_{j=1}^n \lambda_j Y_j - S^+ = Y_{j_0} \\ S^+, S^-, \lambda_j \geq 0 \\ j = 1, 2, \dots, n \end{cases}$$

BCC 模型 (VRS, Variable Returns to Scale) 时:

$\min \theta$

$$\text{s.t.} \begin{cases} \sum_{j=1}^n \lambda_j X_j + S^- = \theta X_{j_0} \\ \sum_{j=1}^n \lambda_j Y_j - S^+ = Y_{j_0} \\ S^-, S^+, \lambda_j \geq 0 \\ j = 1, 2, \dots, n \\ \sum_{j=1}^n \lambda_j = 1 \end{cases}$$

$\theta$  表示效益值,  $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)^T$  为权重向量,  $X_j$  为第  $j$  个 DMU 的投入,  $Y_j$  为第  $j$  个 DMU 的产出,  $S^-$  和  $S^+$  分别为第  $j$  个 DMU 的投入与产出松弛变量, 约束  $S^-$ 、 $S^+$  和  $\lambda$  均大于等于 0。

## 5. 求解 DEA 模型

SPSSAU 借助 pulp 包进行数学求解计算, 分别计算得到 TE (TE, Technical Efficiency)、SE (SE, Scale Efficiency) 和 OE (OE, Overall Efficiency), 以及  $S^-$  和  $S^+$  等指标数据, 并且进行输出, 其中  $OE = TE \times SE$ 。

- ✓ OE=1 时意味着 DEA 有效, 反之 OE<1 意味着 DEA 无效;
- ✓ TE=1 意味着技术效率合理, 反之 TE<1 意味着技术效益还有提升空间;
- ✓ SE=1 则说明规模收益不变 (最优状态), SE<1 说明规模收益递增 (规模过小可扩大规模增加效益), SE>1 说明规模收益递减 (规模过大可减少规模增加效益);
- ✓ 松弛变量  $S^-$  意义为‘减少多少投入时达目标效率’;
- ✓ 松弛变量  $S^+$  意义为‘增加多少产出时达目标效率’;
- ✓ 结合综合效益指标,  $S^-$  和  $S^+$  共 3 个指标, 可判断 DEA 有效性, 如果综合效益=1 且  $S^-$  与  $S^+$  均为 0, 则‘DEA 强有效’, 如果综合效益为 1 但  $S^-$  或  $S^+$  大于 0, 则‘DEA 弱有效’, 如果综合效益<1 则为‘非 DEA 有效’。

参考文献

- 【1】 The SPSSAU project (2024). SPSSAU. (Version 24.0) [Online Application Software]. Retrieved from <https://www.spssau.com>.
- 【2】 PuLP: A Linear Programming Toolkit for Python (Version 2.6.0). Available at: <https://github.com/coin-or/pulp>.
- 【3】 周俊,马世澎. SPSSAU 科研数据分析方法与应用.第 1 版[M]. 电子工业出版社,2024.