

灰色预测模型算法

目录

SPSSAU 操作.....	1
SPSSAU 数据格式.....	2
算法.....	2
1. 数据准备.....	2
2. 平移转换.....	2
3. 计算累加序列.....	3
4. 建立灰色模型.....	3
5. 参数估计.....	3
6. 预测值计算.....	3
7. 反累加生成.....	3
8. 拟合评价指标.....	3
参考文献.....	4

灰色预测模型（Grey Prediction Model）是一种基于灰色系统理论的预测方法，适用于处理小样本和不确定性问题。其位于 SPSSAU-» 综合评价-» 灰色预测模型。

SPSSAU 操作



该截图展示了 SPSSAU 平台中灰色预测模型的操作界面。界面顶部包含一个蓝色的“开始分析”按钮。右侧区域包含一个“模型”下拉菜单，下方是“平移转换”复选框（已勾选），以及“向后预测期数”输入框。界面下方是一个大的浅灰色操作区域，底部有一个“标签 [可选]”的输入框。

将分析项（仅 1 项）拖拽至右侧框然后‘开始分析’即可，另可在分析时将研究序列名称即标签拖拽到‘标签’框中。SPSSAU 中涉及 3 项参数，分别是模型、平移转换和向后预测期数。

- ✓ 模型：默认支持为 GM(1,1)模型。
- ✓ 平移转换：默认会选中该参数，数据通常需要满足级比值检验，如果不满足时，SPSSAU 默认会自动加入一常数 c 值，保证数据满足后再进行灰色预测分析。
- ✓ 向后预测期数：默认提供向后 12 期的预测值，可自行设置向后预测期数。

### SPSSAU 数据格式

	A	B	C	I
1	年份	城市交通噪声	...	
2	1986	71.10		
3	1987	72.40		
4	1988	72.40		
5	1989	72.10		
6	1990	71.40		
7	1991	72.00		
8	1992	71.60		
9	.....	.....		

灰色预测 GM(1,1)模型通常针对数量非常少的样本进行预测，如果数据带有时间项，其并不需要纳入分析项中（可将其放入‘标签’项中），但整理数据时一般需要将数据依次按时间排序好录入数据。

### 算法

#### 1. 数据准备

首先，收集待预测的时间序列数据，通常表示为一个数组：

$$X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$$

其中， $x_1$ 是初始值， $x_2, \dots, x_n$ 是后续观测值。

#### 2. 平移转换

如果选中‘平移转换’，系统首先会进行级比值检验，公式如下：

$$\lambda = \frac{x_{i-1}}{x_i}$$

需要介于  $[e^{-2/(n+1)}, e^{2/(n+1)}]$  之间，如果不满足，SPSSAU 会让数据序列同时加上一个固定数字，然后使用新数据进行级比值检验，该数据称为平移转换 shift 值。与此同时，后续均基于新数据进行计算，但在最后进行预测时会减去平移转换 shift 值。

### 3. 计算累加序列

进行数据的累加生成 (AGO) , 得到新的序列:

$$Y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$$

其中:

$$y_k = \sum_{i=1}^k x_i \quad (k = 0, 1, 2, \dots, n)$$

### 4. 建立灰色模型

根据累加生成序列建立灰色模型, 模型的基本形式如下:

$$\frac{dy}{dt} + ay = b$$

通过离散化处理, 得到:

$$y_{k+1} - y_k + ay_k = b$$

### 5. 参数估计

通过最小二乘法估计模型参数  $a$  和  $b$ 。设定:

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.5(y_0 + y_1) & 1 \\ -0.5(y_1 + y_2) & 1 \\ \vdots & \vdots \\ -0.5(y_{n-2} + y_{n-1}) & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$$

### 6. 预测值计算

根据模型参数  $a$  和  $b$ , 计算未来的预测值。预测公式为:

$$\hat{y}_{k+1} = \left( y_1 - \frac{b}{a} \right) e^{-ak} + \frac{b}{a}$$

其中,  $\hat{y}_{k+1}$  为第  $k+1$  个时刻的预测值。

### 7. 反累加生成

将预测的累加值反累加生成得到原始数据的预测值:

$$\hat{x}_{k+1} = \hat{y}_{k+1} - \hat{y}_k$$

与此同时, 如果数据有进行过平移转换, 还需要减去平移转换值, 即:

$$\hat{x}_{k+1} = \hat{y}_{k+1} - \hat{y}_k - \text{shift}$$

### 8. 拟合评价指标

SPSSAU 提供各类评价指标, 如下:

模型拟合效果指标

评价指标	意义
残差	模型拟合偏差值, 其为真实值减去预测值, 该值越小越好
相对误差	模型拟合偏差幅度, 其残差绝对值/真实值, 该值越小越好
级比偏差	模型拟合偏差值, 该值越小越好
后验差比 C 值	模型精度等级检验, 其为残差方差 / 数据方差, 该值越小越好
小误差概率 p 值	模型拟合偏差幅度指标, 该值越大越好

RMSE (均方根误差)	模型拟合偏差值, 其为残差平方平均值开根号, 该值越小越好
--------------	-------------------------------

✓ 残差

$$e = \hat{x} - x$$

✓ 相对误差

$$\varepsilon_i = \frac{|x_i - \hat{x}_i|}{x_i} \times 100\%$$

✓ 级比偏差

$$\rho_i = 1 - \frac{1 - 0.5a}{1 + 0.5a} \times \lambda, \rho_i \text{ 表示级比偏差, } a \text{ 为发展系数, } \lambda \text{ 为级比值}$$

✓ 后验差比 C 值

$$C = \frac{S_2}{S_1}, C \text{ 表示级比偏差,}$$

其中  $S_1$  为序列方差, 计算公式为:  $S_1 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n \left( x_i - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \right)^2$ ,

$S_2$  为残差方差, 计算公式为:  $S_2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n \left( |x_i - \hat{x}_i| - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n |x_i - \hat{x}_i| \right)^2$

✓ 小误差概率  $p$  值

$$p = P|e_i - \bar{e}| \leq 0.6745 \times S_1, S_1 \text{ 表示序列方差}$$

$\bar{e} = \frac{1}{n-1} \sum_{i=2}^n e_i$ ,  $e_i$  表示残差值,  $\bar{e}$  计算时并未将第 1 个值纳入计算 (第 1 个值时残差一定为 0)。

✓ RMSE 均方根误差

$$RMSE = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=2}^n e_i^2}$$

### 参考文献

【1】The SPSSAU project (2024). SPSSAU. (Version 24.0) [Online Application Software].

Retrieved from <https://www.spssau.com>.

【2】周俊, 马世澎. SPSSAU 科研数据分析方法与应用. 第 1 版[M]. 电子工业出版社, 2024.