

SBM 算法

目录

SPSSAU 操作.....	2
SPSSAU 数据格式.....	3
算法.....	3
1. 确定决策单元 (DMUs)	3
2. 建立 SBM 模型.....	3
3. 求解 SBM 模型.....	5
参考文献.....	5

SBM (Slacks-Based Measure) 模型是一种用于评估决策单元 (DMUs) 相对效率的非参数方法，主要用于处理多输入和多输出的情况。其位于 SPSSAU-» 综合评价-» SBM。

spssau.com

SPSSAU 操作



The image shows the SPSSAU analysis configuration interface. At the top left is a blue button labeled '开始分析' (Start Analysis). To its right is a trash icon, a dropdown menu labeled '类型' (Type) with a downward arrow, and a checkbox labeled '超效率SBM' (Super-efficiency SBM) which is currently unchecked. Further right is a checked checkbox labeled '非负平移' (Non-negative shift) with a help icon. Below these are four large, light gray rectangular boxes for selecting analysis items: '投入(X)' (Inputs), '产出(Y)' (Outputs), '非期望产出 [可选]' (Undesired outputs [Optional]), and 'DMU标签 [可选]' (DMU labels [Optional]).

将分析项，包括投入项 X，产出项 Y，非期望产出，DMU 拖拽至右侧框然后‘开始分析’即可。SPSSAU 中涉及三项参数，分别是类型、超效率 SBM 和非负平移。

类型：默认为 BCC（VRS, Variable Returns to Scale），可选为 CCR 类型（CRS, Constant Returns to Scale）。

超效率 SBM：默认不选中该项。

非负平移：选中该参数后，以列为单位，如果某列数据出现小于等于 0，此时平移单位为：最小值的绝对值+0.01，此参数保证数据均为正数可正常计算。

SPSSAU 数据格式

	A	B	C	D	E	F
1	DMU	指标1	指标2	指标3	指标4	指标5
2	A1	14.4	0.65	31.3	3621	0.09
3	A2	16.9	0.72	32.2	3943	0.09
4	A3	15.53	0.72	31.87	4086.67	0.07
5	A4	15.4	0.76	32.23	4904.67	0.13
6	A5	14.17	0.76	32.4	6311.67	0.37
7

进行 SBM 模型（或者超效率 SBM 模型），此时单独一列放 DMU，其余各列放置研究指标，包括投入指标、产出指标或者非期望产出指标，与此同时，DMU 列可有可无，如果有则可拖拽放入‘DMU 标签【可选】’框中。

算法

1. 确定决策单元 (DMUs)

首先确定好投入和产出变量数据。投入变量表示生产过程中使用的资源（如人力、资金等），产出变量表示生产的产品或服务（如产品数量、服务质量等）。如果研究中包括‘非期望产出’项，也需要提供。

2. 建立 SBM 模型

SPSSAU 中，SBM 模型共包括四种，分别是：SBM 且 BCC、SBM 且 CCR、Super-SBM 且 BCC 和 Super-SBM 且 CCR，其模型分别如下：

✓ SBM 且 BCC/CCR 时：

假定： $x \in R^q, y^g \in R^{u_1}, y^b \in R^{u_2}$ ，定义矩阵 X, Y^g, Y^b ，如下：

$$X = [x_1 \ \cdots \ x_n] \in R^{q \times n} > 0$$

$$Y^g = [y_1^g, \dots, y_n^g] \in R^{u_1 \times n} > 0$$

$$Y^b = [y_1^b, \dots, y_n^b] \in R^{u_2 \times n} > 0$$

可构建包含非期望产出的生产可能性集 P ，

$$P = \{(x, y^g, y^b) | x \geq X\lambda, y^g \leq Y^g\lambda, y^b \geq Y^b\lambda, \lambda \geq 0\}$$

接着构建数学模型如下：

$$\rho = \min \frac{1 - \frac{1}{q} \sum_{i=1}^q \frac{s_i^-}{x_{i0}}}{1 + \frac{1}{u_1 + u_2} \left(\sum_{r=1}^{u_1} \frac{s_r^g}{y_{r0}^g} + \sum_{i=1}^{u_2} \frac{s_i^b}{y_{i0}^b} \right)}$$

$$\begin{aligned} x_0 &= X\lambda + s^- \\ y_0^g &= Y^g\lambda - s^g \\ y_0^b &= Y^b\lambda + s^b \end{aligned}$$

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1, s^- \geq 0, s^g \geq 0, s^b \geq 0$$

其中：

x 、 y^g 、 y^b 代表决策单元的投入项，期望产出项和非期望产出项

s^- 、 s^g 、 s^b 分别表示投入、期望产出和非期望产出的松弛向量

λ 为权重向量

模型中下标“0”为被评价单元

目标函数值 ρ 为效率值

当 $\rho=1$ ， s^- 、 s^g 、 s^b 均为 0 时，决策单元是有效率的；当 $\rho<1$ 时，表明决策单元存在效率损失，有必要在投入产出上做出相应改进。

SBM 模型可以设定投入导向、产出导向和非导向三种，投入导向是指在保证产出一定时，寻找最少的投入；产出导向是指在投入量一定时，寻找最大的产出；非导向是指同时从投入和产出角度进行测算，因而也被称作投入产出双向。

SPSSAU 默认提供为非导向类型，即同时从投入和产出角度进行测算。

上式为 BCC 模型结构式，如果为 CCR 结构式，则没有 $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$ 这一限制条件。

✓ **Super-SBM 且 BCC/CCR 时：**

$$\rho = \min \frac{\frac{1}{q} \sum_{i=1}^q \frac{\bar{x}_i}{x_{i0}}}{\frac{1}{u_1 + u_2} \left(\sum_{r=1}^{u_1} \frac{\bar{y}_r^g}{y_{r0}^g} + \sum_{i=1}^{u_2} \frac{\bar{y}_i^b}{y_{i0}^b} \right)}$$

$$\bar{x} \geq \sum_{i=1, \neq 0}^n \lambda_i x_i, \bar{y}^g \leq \sum_{i=1, \neq 0}^n \lambda_i y_i^g$$

$$\bar{y}^b \geq \sum_{i=1, \neq 0}^n \lambda_i y_i^b, \bar{x} \geq x_0, \bar{y}^g \leq y_0^g, \bar{y}^b \geq y_0^b$$

$$\sum_{i=1, \neq 0}^n \lambda_i = 1, \bar{y}^g \geq 0, \lambda \geq 0$$

上式为 BCC 模型结构式，如果为 CCR 模型，则没有 $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$ 这一限制条件。

3. 求解 SBM 模型

SPSSAU 借助 MIP 包进行数学求解计算。

参考文献

- 【1】 The SPSSAU project (2024). SPSSAU. (Version 24.0) [Online Application Software]. Retrieved from <https://www.spssau.com>.
- 【2】 MIP: Mixed Integer Programming in Python(Version 1.15.0). GitHub. <https://github.com/coin-or/python-mip>.
- 【3】 PuLP: A Linear Programming Toolkit for Python (Version 2.6.0). Available at: <https://github.com/coin-or/pulp>.
- 【4】 Tone K .A slacks-based measure of efficiency in data envelopment analysis[J].European Journal of Operational Research, 2001, 130(3):498-509.DOI:10.1016/S0377-2217(99)00407-5.
- 【5】 刀根,薰.Dealing with Undesirable Outputs in DEA : A Slacks-based Measure (SBM) Approach(DEA(1))[J].日本オペレーションズ・リサーチ学会春季研究発表会アブストラクト集, 2004.